ministère
éducation
nationale

ÉduSCOL
[dgesco]

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Mathématiques

Collège

- Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège -

- Raisonnement et démonstration -

Juin 2009

Raisonnement et démonstration au collège

SOMMAIRE

Introduction : ce que dit le programme de collège

Le programme de mathématiques du collège accorde une place centrale à la résolution de problèmes. Il insiste en particulier fortement sur l'importance de la résolution de problèmes dans l'acquisition du socle commun de connaissances et de compétences. La résolution de problèmes constitue en effet, dans le champ des mathématiques, la mise en œuvre de la méthode d'investigation. Cette nécessité de structurer l'activité mathématique des élèves autour de la résolution de problèmes est affirmée dans l'introduction générale des programmes de mathématiques, mais est aussi rappelée dans l'en-tête de chaque partie du programme de chaque classe avec des indications précises sur les objectifs assignés.

La résolution de problèmes, en mathématiques, recouvre plusieurs activités qui, toutes, s'appuient sur le raisonnement de l'élève. Ces activités, parfois successives mais souvent imbriquées, peuvent se décliner en compétences :

- lire, interpréter et organiser l'information ;
- s'engager dans une démarche de recherche et d'investigation ;
- mettre en relation les connaissances acquises, les techniques et les outils adéquats pour produire une preuve ;
- communiquer par des moyens variés et adaptés – aptes à convaincre – la solution du problème.

À cet égard, l'introduction du programme de mathématiques décrit deux étapes dans le raisonnement mathématique :

> « *[…] deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré. En effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège.* »

et distingue le raisonnement – constitué de la recherche, de la découverte et de la production d'une preuve – de la démonstration formalisée qui est la forme aboutie – structurée sous forme déductive et rédigée – de ce raisonnement.

C'est dans ce sens que l'expression « démonstration formalisée » est utilisée dans ce document.

L'objet de ce document ressource pour la classe est d'essayer de dégager comment on peut, dans les classes de collège, favoriser le raisonnement et ouvrir ainsi le champ de la résolution de problèmes au plus grand nombre d'élèves, y compris à ceux qui ont des difficultés à entrer dans les codes de la rédaction d'une démonstration. On peut rappeler à cet égard que « *la mise en forme écrite [d'une preuve] ne fait pas partie des exigibles* » du socle commun.
Ainsi, ce document a l'ambition de rappeler que :

- *raisonner en mathématiques,* ***ce n'est pas seulement pratiquer le raisonnement déductif,***
- *un raisonnement déductif peut être considéré comme* ***complet même s'il n'a pas une mise en forme canonique,***

et de contribuer à la prise en compte dans les classes de cette diversité.

1. Le raisonnement mathématique

a) Différents types de raisonnement

On peut distinguer, dans le domaine scientifique, deux types de raisonnement :

- le raisonnement par induction et présomption : de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale ;
- le raisonnement par déduction : à partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une propriété.

Dans le domaine des sciences expérimentales, le raisonnement par induction se suffit à lui-même si la méthode employée est suffisamment rigoureuse : la présomption qui résulte d'observations concordantes débouche sur la mise en place d'un protocole expérimental destiné à vérifier les « hypothèses » émises. L'expérience doit être reproductible et la preuve qui en résulte s'apparente à une preuve statistique (par estimateur ou intervalle de confiance).

En mathématiques, le raisonnement inductif ne se conçoit, en général, que comme une première étape[1], conduisant à une conjecture. Il restera ensuite, par un raisonnement déductif, à démontrer la véracité de cette conjecture.
Alors que le raisonnement déductif fonctionne selon le schéma classique :
« Sachant que (A est vraie) et que (A implique B) est vraie, je déduis que (B est vraie) »,
le raisonnement inductif fonctionne selon un schéma présomptif :
« Constatant que dans les exemples où (A est vraie), alors (B est vraie), je présume que (A implique B) est vraie »
ou un schéma explicatif :
« Sachant que (A implique B) est vraie, j'explique que (B est vraie) en présumant que (A est vraie) »

[1] Il y a une exception notable : celle de l'invalidation, par la production d'un contre-exemple, d'une propriété universelle.

Le raisonnement inductif prend toute sa place en mathématiques dans la phase de recherche, en particulier sous la forme du schéma explicatif dans le raisonnement par chaînage arrière – essentiel en géométrie[2].
Dans la phase de recherche, cela conduirait à se poser la question de ce qu'il suffirait d'avoir pour emporter la conclusion.

En revanche, une preuve apportée sur un exemple générique est une forme de raisonnement déductif, car il s'agit d'une démonstration faite sur un exemple mais transférable. Dans ce cadre, il faut faire identifier aux élèves en quoi l'exemple est générique, par exemple pour établir des propriétés des opérations, alors même que le professeur choisit de ne pas formaliser avec tous les élèves la généralisation du raisonnement utilisant le recours au calcul littéral. Dans ce cas, la démonstration formalisée, telle qu'elle est définie plus haut, n'est pas faite.

Lorsqu'on demande une démonstration à un élève, on lui demande de s'engager au préalable dans une phase d'investigation pendant laquelle la démarche est essentiellement inductive. En revanche, une fois la preuve trouvée, seul le raisonnement déductif est utilisé dans la phase de mise en forme. Une des difficultés majeures pour le professeur va donc consister à faire vivre dans la classe des moments où il va faire pratiquer à ses élèves des raisonnements inductifs (notamment pour expliquer comment on trouve des résultats), tout en devant les leur refuser et leur apprendre à les remplacer par des raisonnements déductifs dans les démonstrations. En fait, pour l'élève, la difficulté est double :

- il faut passer d'un raisonnement inductif à un raisonnement déductif pour établir la preuve ;
- il faut ensuite mettre en forme ce raisonnement déductif pour en faire une démonstration c'est-à-dire une preuve communicable.

b) Démarche d'investigation et raisonnement

Dans le domaine scientifique, la démarche d'investigation occupe une place essentielle à chaque fois qu'une question est posée et que la réponse ne peut être donnée immédiatement à partir de connaissances disponibles. La mise en œuvre d'une telle démarche dans une séquence d'enseignement doit déboucher sur des acquisitions de connaissances et de compétences.
En mathématiques, elle trouve véritablement sa place dans la résolution de problèmes (ou de questions ouvertes) et doit donner l'occasion, par sa mise en œuvre, d'acquérir ou de consolider des compétences pour concevoir ou utiliser un raisonnement.

❖ *Les étapes possibles d'une démarche d'investigation en mathématiques*

Réflexion sur le problème posé :

1. appropriation du problème, vocabulaire, contexte,
2. confrontation avec les savoirs disponibles (il est donc nécessaire de « connaître son cours »),
3. recherche éventuelle d'informations sur le thème.

Élaboration d'une conjecture :

1. recherche, avec mise en place éventuelle d'une première expérimentation,
2. émission de la conjecture,
3. confirmation, avec mise en place éventuelle d'une seconde expérimentation.

Mise en place d'une preuve argumentée.

Ce travail, inclus dans une séquence d'enseignement, est suivi d'un temps de synthèse identifiant clairement les points à retenir puis d'une institutionnalisation des acquis (notions, savoir-faire, démarches) et de leur mise en œuvre. En fin de séance, l'institutionnalisation peut être simplement : « Aujourd'hui, on a appris à calculer la longueur de l'hypoténuse connaissant la longueur des deux autres côtés … ».

---

[2] Voir le document ressource « Géométrie » des programmes de collège : http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_geometrie.pdf.

❖ *Place du raisonnement dans cette démarche*

Les élèves seront amenés à raisonner en alternant :

1. des temps de recherches individuelles laissant une certaine autonomie à l'élève qui doit choisir des directions, émettre des hypothèses (en mathématique on dira faire des conjectures), faire des essais (expérimentations) avec des allers-retours possibles. Le professeur observe la progression des élèves, peut échanger avec quelques-uns pour ne pas les laisser en situation de blocage ou éviter qu'ils se dirigent trop longtemps sur une voie sans issue, et surtout repère tous les éléments qui lui permettront de gérer la réflexion collective ;
2. des temps d'échanges oraux permettant aux élèves de proposer leurs idées, de les argumenter, de les justifier, de valider ou de rejeter les propositions de leurs camarades.

De nombreux types de raisonnement peuvent être mis en œuvre : le raisonnement par induction-présomption y est très présent puisque, dans une activité d'investigation, la démarche à suivre n'est pas suggérée par l'énoncé, mais il peut être aussi déductif, par l'absurde, par exhaustivité des cas, … Cependant, il est important que la mise en œuvre, orale ou écrite, ne soit pas gênée par un formalisme prématuré.

La rédaction finale, l'application des résultats obtenus, entamées ou non en classe, peuvent être données à faire en dehors de la classe, les demandes pouvant être diversifiées en fonction des élèves et des objectifs d'apprentissage visés. Toutefois, la rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit.

❖ *Le raisonnement déductif dans la démarche d'investigation*

Exemple 1, en troisième :

$\sqrt{2}$ est-il un nombre décimal ?

Première expérimentation : la calculatrice donne, cpmme valeur de $\sqrt{2}$ une première conjecture :

$\boxed{1{,}414213562}$

qui doit amener la remarque : « Quelle est la dixième décimale ? ».
Une deuxième expérimentation pourrait être d'effectuer 1,414213562 × 1,414213562 avec la calculatrice, ce qui donne 2.
L'infirmation de la conjecture : « $\sqrt{2}$ = 1,414213562 » pourrait être élaborée à partir de la remarque d'un élève qui a commencé à poser l'opération et qui dit, « le dernier chiffre après la virgule est un 4 ».

Émission d'une nouvelle conjecture : « il n'y a pas de nombre décimal dont le carré est 2 ».

Et la preuve : s'il y en avait un, il s'écrirait 1,41421356………1
ou 1,41421356………2
ou 1,41421356………3
ou 1,41421356………4 etc.

• tous les cas peuvent être examinés avec le raisonnement précédent, ***raisonnement par disjonction des cas.***
• d'où la conclusion : ***raisonnement par l'absurde.***

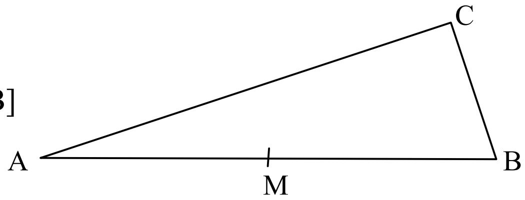
Exemple 2, à partir de la quatrième :

> Deux points A et B étant donnés, déterminer l'ensemble de tous les points C tel que le triangle ABC soit un triangle rectangle en C

Première expérimentation : tracé d'un certain nombre de points avec une équerre ou avec un logiciel de géométrie dynamique (dans les deux cas, l'élève est amené à raisonner pour faire sa construction).
Observation : cela semble être un cercle. Mais quel est son centre ?

Émission d'une conjecture : l'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB].
Vérification expérimentale avec une règle graduée, un compas ou le logiciel : la distance du milieu de [AB] aux points tracés est-elle égale à la moitié de AB ?
Un triangle tracé en partant d'un point du cercle est-il toujours rectangle ?

Justification :
Qu'est-ce qui permet de montrer que C est sur le cercle de centre M et de diamètre [AB] (privé des deux points A et B) ?



La diagonale d'un rectangle ?
Des triangles isocèles (grâce aux angles) ?
Les médiatrices des cotés de l'angle droit ? Et réciproquement ?

Raisonnements par induction-présomption puis par déduction
Quelle que soit la méthode choisie, la rédaction de la preuve peut être visée, mais seulement dans un second temps.

Exemple 3, en troisième :

> Quand on lance successivement deux dés, en additionnant les nombres présents sur les deux faces supérieures, la probabilité d'obtenir dix est-elle la même que celle d'obtenir neuf ?

Première expérimentation : une approche fréquentielle (éventuellement faite à la maison avec trente fois 2 lancers par élève, par exemple) n'apparaît pas vraiment significative.

L'idée de la simulation peut alors être utilisée mais la première question qui se pose alors est :
- comment, avec la fonction ALEA (ou la fonction ALEA entre bornes) d'un tableur, simuler le lancer d'un dé ?

On peut amener les élèves à faire le lien avec le tirage au sort d'un point sur un segment partagé en six segments de même longueur.
- comment simuler alors la situation proposée ?

L'émission d'une conjecture est alors aisée, mais l'estimation de la probabilité est ici plus délicate car les fréquences 1/12 et 1/9 ne se devinent pas à partir de l'affichage décimal du tableur.

Dans les deux cas, la création de la simulation nécessite un véritable raisonnement (la fonction ALEA donne un nombre au hasard entre 0 et 1 donc en multipliant par 6 on obtient un nombre au hasard entre 0 et 6, du moins on l'admettra ; la fonction ENT pourra aussi être utile) et apporte au bout du compte un apprentissage en terme d'appréhension du hasard.

On peut alors proposer de déterminer la probabilité grâce à un arbre (pas nécessairement à tous les élèves car l'appel à un raisonnement sur deux épreuves successives n'est pas exigible dans le cadre du socle).

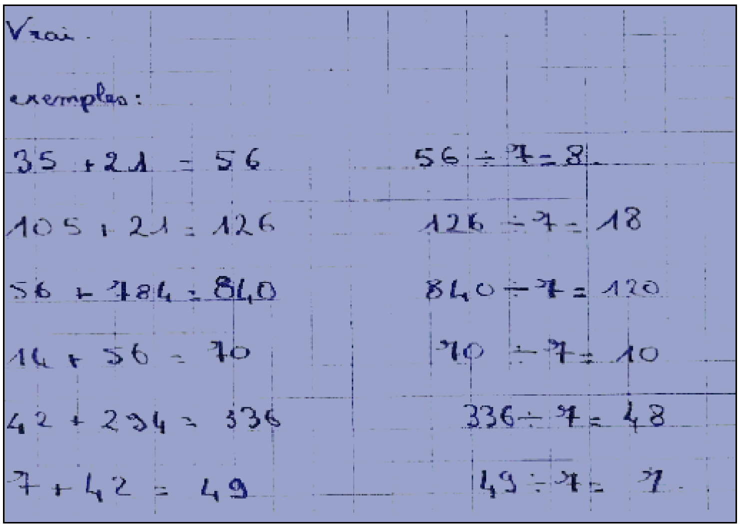
c) Raisonnement et démonstration formalisée

Exemple 4, à partir de la cinquième :

L'affirmation : « la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7 »
est-elle vraie ou fausse ?

Voici quelques productions d'élèves en réponse à la question posée ainsi que quelques éléments d'analyse au regard des compétences relatives à la résolution de problèmes :

- Elève A :



Vrai.

exemples :

35 + 21 = 56 56 ÷ 7 = 8

105 + 21 = 126 126 ÷ 7 = 18

56 + 784 = 840 840 ÷ 7 = 120

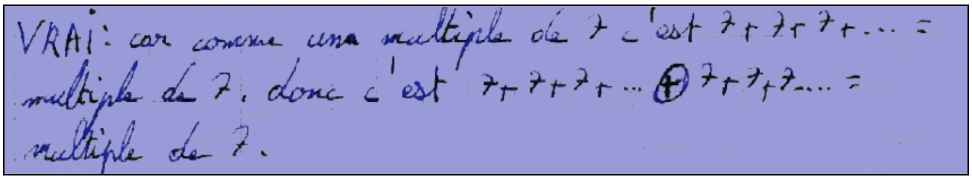
14 + 56 = 70 70 ÷ 7 = 10

42 + 294 = 336 336 ÷ 7 = 48

7 + 42 = 49 49 ÷ 7 = 7

Cet élève montre qu'il a compris le problème (C1). On peut considérer qu'il a engagé une démarche de type expérimental en allant chercher des exemples sur des grands nombres dans le but de vérifier une certaine généralité de l'affirmation. Même si sa production ne constitue pas une preuve acceptable (un débat de classe doit permettre de reconnaître ce point), il a néanmoins conduit un travail qui touche à la capacité (C2).
Il calcule efficacement et maîtrise la notion de multiple : ce qui se réfère ici à la capacité (C3) est maîtrisé.
La mise en forme (C4) est également bien réalisée avec un usage rigoureux du signe d'égalité et des égalités bien disposées qui ne laissent aucun doute sur la démarche proposée.

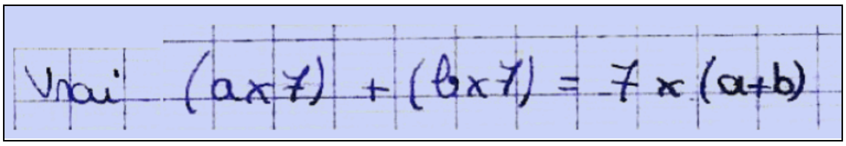
Élève B :


VRAI : car comme une multiple de 7 c'est 7+7+7+... = multiple de 7. donc c'est 7+7+7+... ⊕ 7+7+7... = multiple de 7.

Cet élève propose une solution qui est incontestablement une preuve et même une démonstration. Il serait intéressant d'en demander une formulation en français(« Un multiple de sept est une somme de sept. La somme de deux sommes de sept est encore une somme de sept »).Il a parfaitement compris le problème (C1), il élabore un raisonnement valide (C2) et la mise en forme est claire (C4). L'usage des trois points et du signe plus entouré est ici légitime.

Quant à la capacité (C3), la production de l'élève ne permet pas de l'apprécier.

- Élève C :

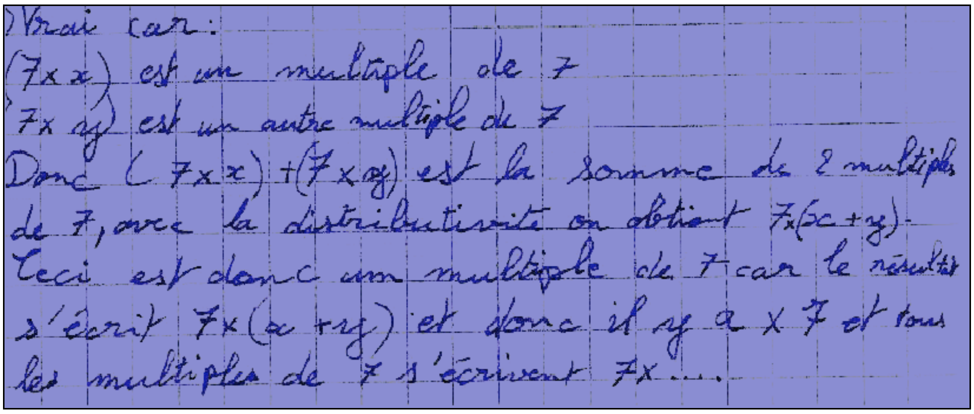

Vrai $(a \times 7) + (b \times 7) = 7 \times (a+b)$

Cet élève propose une preuve elliptique. Un débat de classe devrait faire surgir la nécessité de communiquer de façon plus explicative (en particulier, quelle est la nature des nombres *a* et *b*). La compétence (C4) est donc à renforcer.

Néanmoins, on constate qu'il s'est approprié le problème (C1), qu'il est capable d'utiliser la définition d'un multiple et la distributivité de la multiplication sur l'addition (C3).

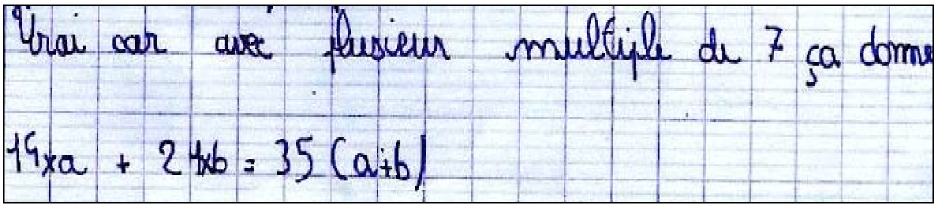
Enfin, même si la rédaction est très courte, l'argument qui est donné est très pertinent (C2).

- Élève D :


Vrai car :
(7×x) est un multiple de 7
(7×y) est un autre multiple de 7
Donc (7×x)+(7×y) est la somme de 2 multiples de 7, avec la distributivité on obtient 7×(x+y).
Ceci est donc un multiple de 7 car le résultat s'écrit 7×(x+y) et donc il y a ×7 et tous les multiples de 7 s'écrivent 7×....

Cet élève propose une preuve similaire à celle de l'élève C avec un souci d'explicitation plus prononcé.

- Élève E :

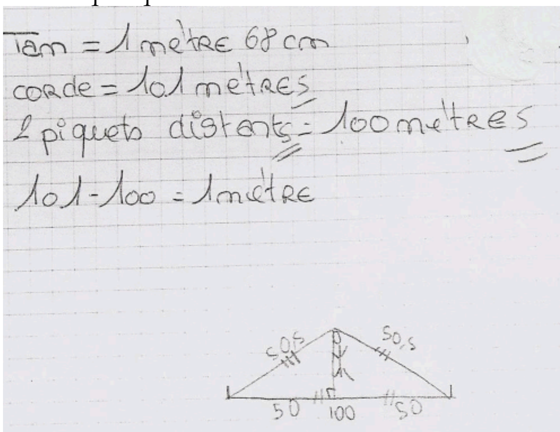

Vrai car avec plusieur multiple de 7 ça donne
14×a + 21×b = 35 (a+b)

Cet élève s'est engagé dans une démarche avec recours à des lettres dans un souci de généralité (C2). Le choix des nombres 14, 21 et 35 et le signe + laissent supposer une certaine appropriation du contexte (C1).

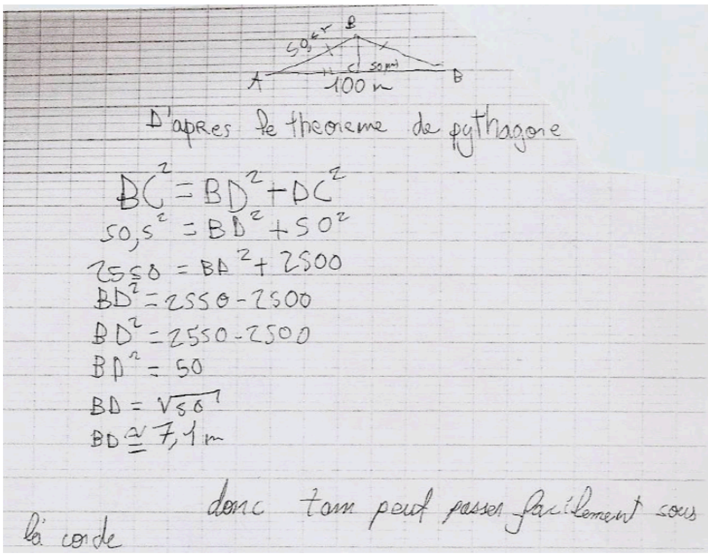
Exemple 5, à partir de la quatrième :

Une corde non élastique de 101 mètres est attachée au sol entre deux piquets distants de 100 mètres. Tam tire la corde en son milieu et la lève aussi haut qu'il peut.
Sachant qu'il mesure 1,68 m, peut-il passer en dessous sans se baisser ?

Voici quelques solutions d'élèves :



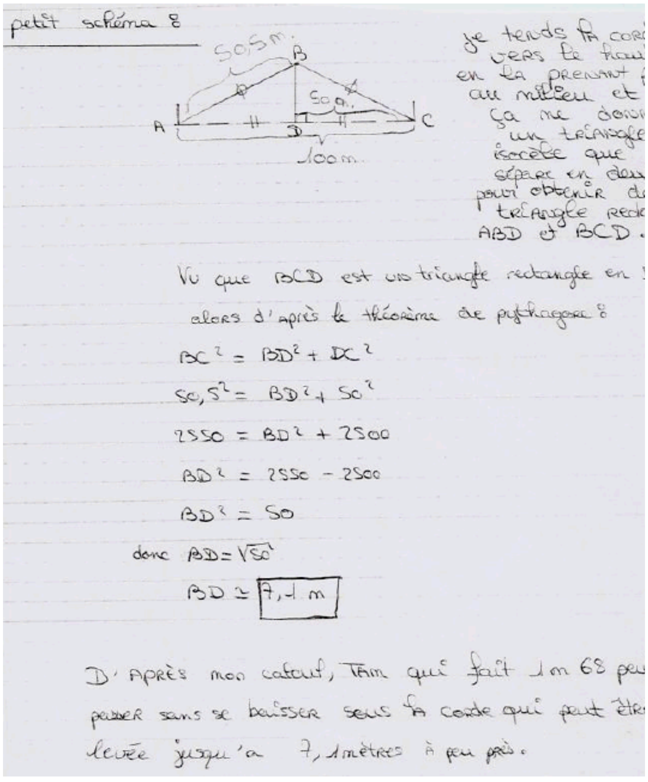
Tam = 1 mètre 68 cm
corde = 101 mètres
2 piquets distants = 100 mètres
101 - 100 = 1 mètre



D'après le théorème de pythagore

$BC^2 = BD^2 + DC^2$
$50,5^2 = BD^2 + 50^2$
$2550 = BA^2 + 2500$
$BD^2 = 2550 - 2500$
$BD^2 = 2550 - 2500$
$BD^2 = 50$
$BD = \sqrt{50}$
$BD \simeq 7,1$ m

donc tam peut passer facilement sous la corde



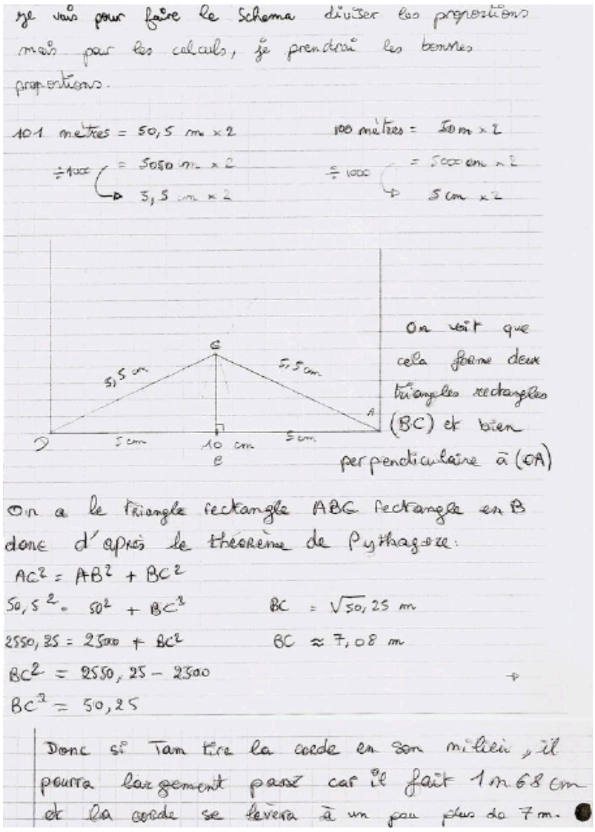
petit schéma :

je tends la corde vers le haut en la prenant au milieu et ça me donne un triangle isocèle que je sépare en deux pour obtenir des triangles rectangles ABD et BCD.

Vu que BCD est un triangle rectangle en D alors d'après le théorème de pythagore :

$BC^2 = BD^2 + DC^2$
$50,5^2 = BD^2 + 50^2$
$2550 = BD^2 + 2500$
$BD^2 = 2550 - 2500$
$BD^2 = 50$
donc $BD = \sqrt{50}$
$BD \simeq \boxed{7,1 \text{ m}}$

D'après mon calcul, Tam qui fait 1 m 68 peut passer sans se baisser sous la corde qui peut être levée jusqu'à 7,1 mètres à peu près.



je vais pour faire le schema diviser les proportions mais pour les calculs, je prendrai les bonnes proportions.

101 mètres = 50,5 m × 2 — 100 mètres = 50 m × 2
÷ 1000 : = 5050 cm × 2 → 5,5 cm × 2 — ÷ 1000 : = 5000 cm × 2 → 5 cm × 2

On voit que cela forme deux triangles rectangles (BC) et bien perpendiculaire à (DA)

On a le triangle rectangle ABG rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$50,5^2 = 50^2 + BC^2$ — $BC = \sqrt{50,25}$ m
$2550,25 = 2500 + BC^2$ — $BC \approx 7,08$ m
$BC^2 = 2550,25 - 2500$
$BC^2 = 50,25$

Donc si Tam tire la corde en son milieu, il pourra largement passer car il fait 1 m 68 cm et la corde se lèvera à un peu plus de 7 m.

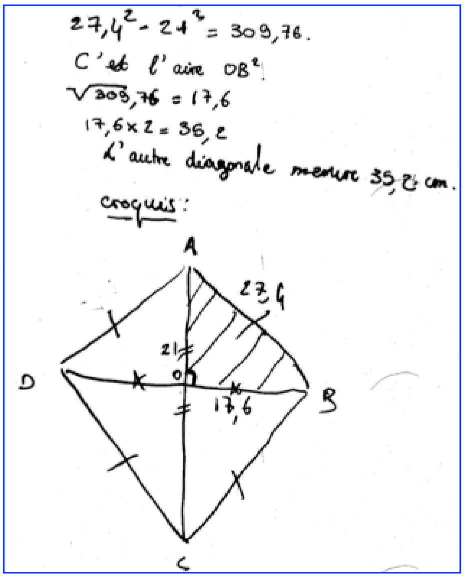
❖ *Du raisonnement à la démonstration*

Dans la phase d'apprentissage du raisonnement, il est impératif de valoriser les écrits intermédiaires même approximatifs. En voici un exemple :

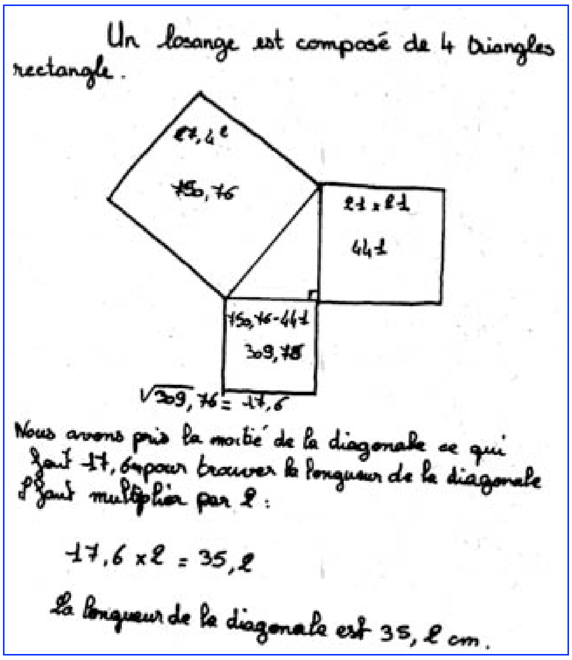
Exemple 6, à partir de la quatrième :

Le côté d'un losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales 42 cm. Quelle est la longueur de sa seconde diagonale ?

Solution 1



Solution 2



Ces deux rédactions originales constituent des écrits de communication aboutis, même si elles n'entrent pas dans le cadre des démonstrations normalisées. Elles sont, en tous cas, la preuve de raisonnements de grande qualité et méritent d'être valorisées.

d) Démonstration et argumentation

Dans ce paragraphe, on cherche à comparer l'argumentation en mathématiques et l'argumentation dans la vie courante ou dans d'autres disciplines. Persuader, convaincre en mathématique, ne vient pas de la force de conviction: cela n'a pas de sens en mathématiques.

Il faut identifier les arguments qui ont légitimité en mathématiques, où un exemple ne suffit pas même s'il est produit par celui qui parle le plus fort. Certains arguments peuvent nous persuader (pour une conjecture) mais ils sont trop faibles pour convaincre en mathématique car ils n'ont pas valeur de preuve. Dans la classe, il faut autoriser une parole assez libre (débat mathématique) et la mise en avant d'arguments personnels, car ils ont toute leur place en particulier dans la recherche de conjecture :
Exemple : voir plus loin **Exercice 18**

e) Énoncés ouverts et raisonnement

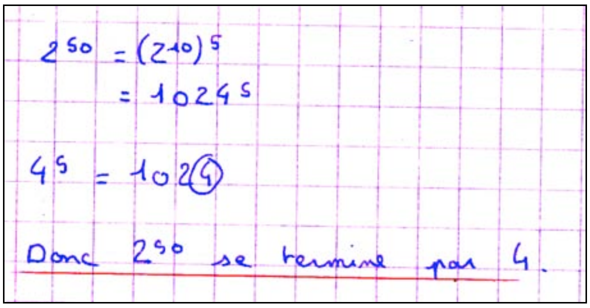
L'exemple suivant montre l'intérêt de laisser ouverte la formulation d'un problème pour favoriser l'engagement des élèves dans sa résolution et laisser émerger des démarches variées.

Exemple 7, à partir de la quatrième :

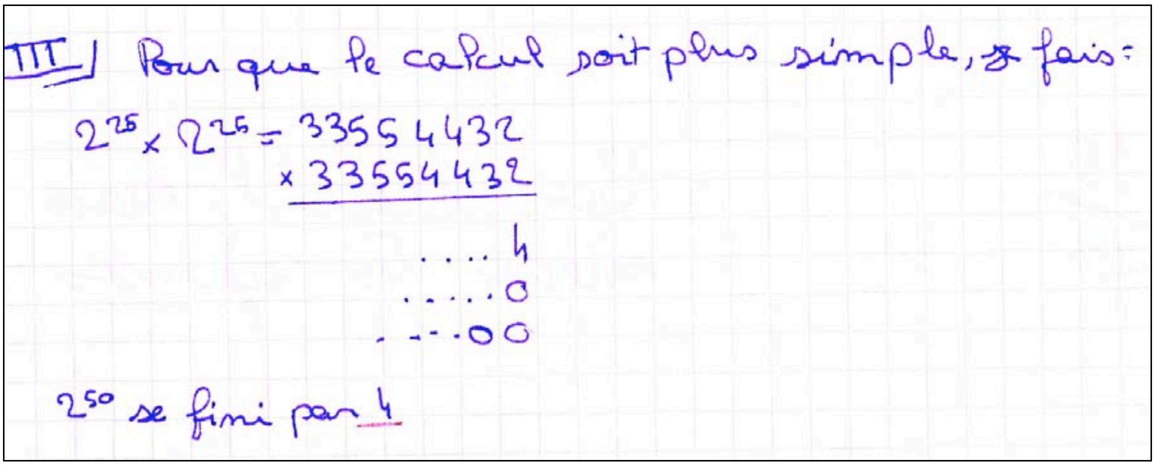
Quel est le dernier chiffre de 2 puissance 50 ?

Voici quelques productions d'élèves :

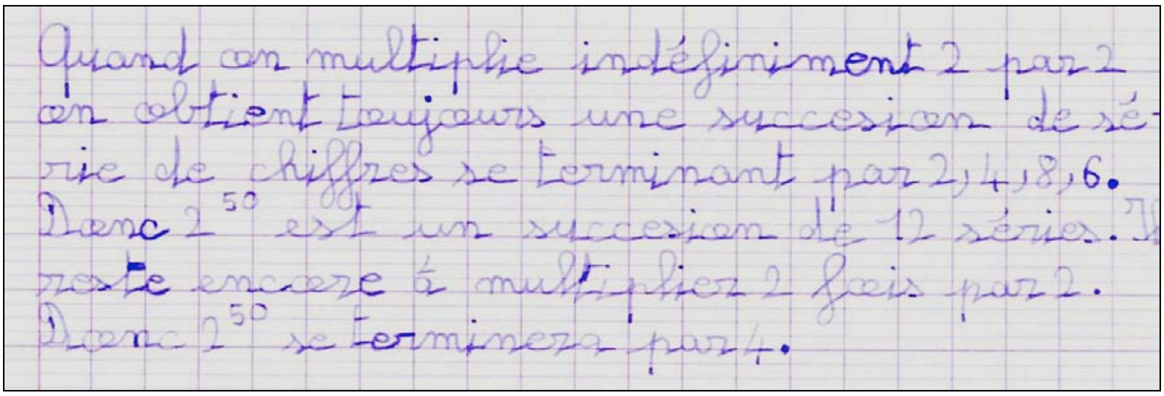
- Élève A :


$2^{50} = (2^{10})^5$
$= 1024^5$
$4^5 = 1024$
Donc 2^{50} se termine par 4.

- Élève B :

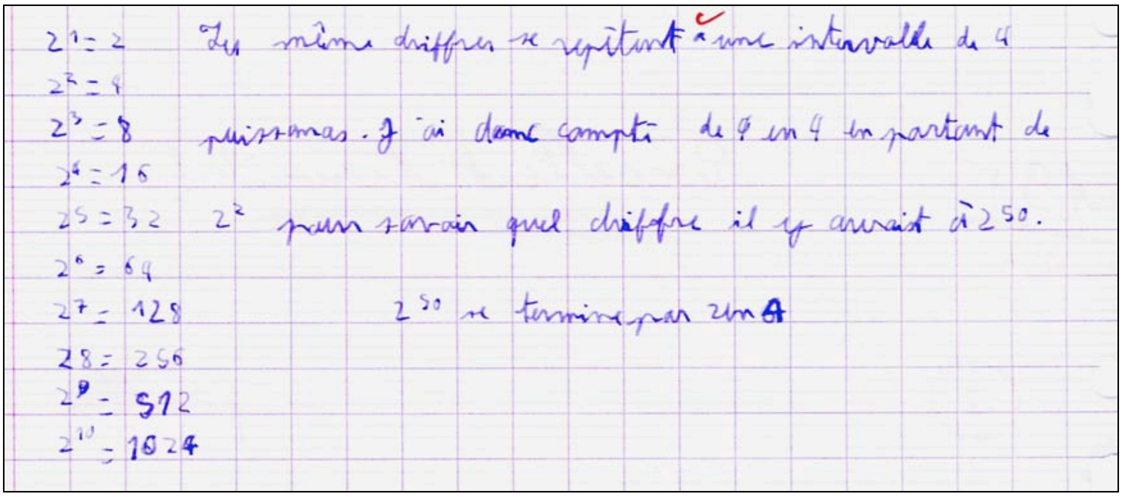

III/ Pour que le calcul soit plus simple, ~~je~~ fais :
$2^{25} \times 2^{25} = 33554432$
$\times\ 33554432$
....4
....0
...00
2^{50} se fini par 4

- Élève C :


Quand on multiplie indéfiniment 2 par 2 on obtient toujours une succesion de série de chiffres se terminant par 2, 4, 8, 6.
Donc 2^{50} est un succesion de 12 séries. Il reste encore à multiplier 2 fois par 2.
Donc 2^{50} se terminera par 4.

-

- Élève D :

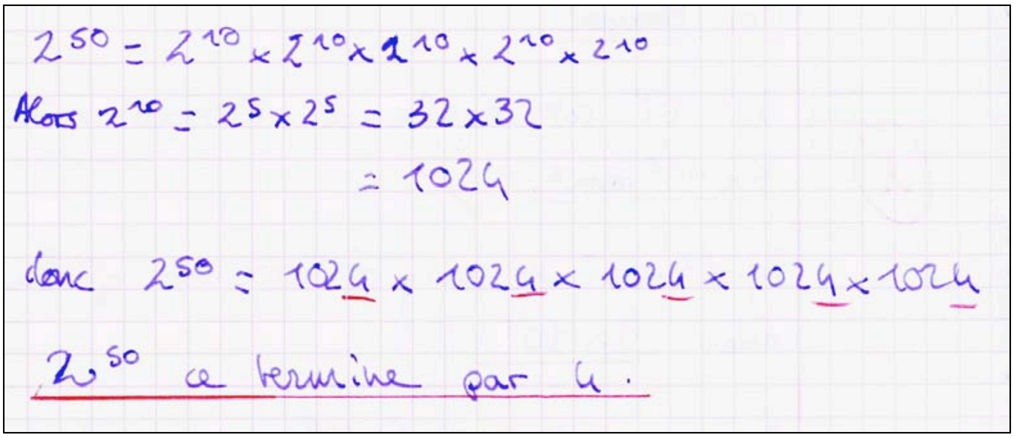


$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$

Les même chiffres se répètent à une intervalle de 4 puissances. J'ai donc compté de 4 en 4 en partant de 2^2 pour savoir quel chiffre il y aurait à 2^{50}.

2^{50} se termine par un 4

- Élève E :



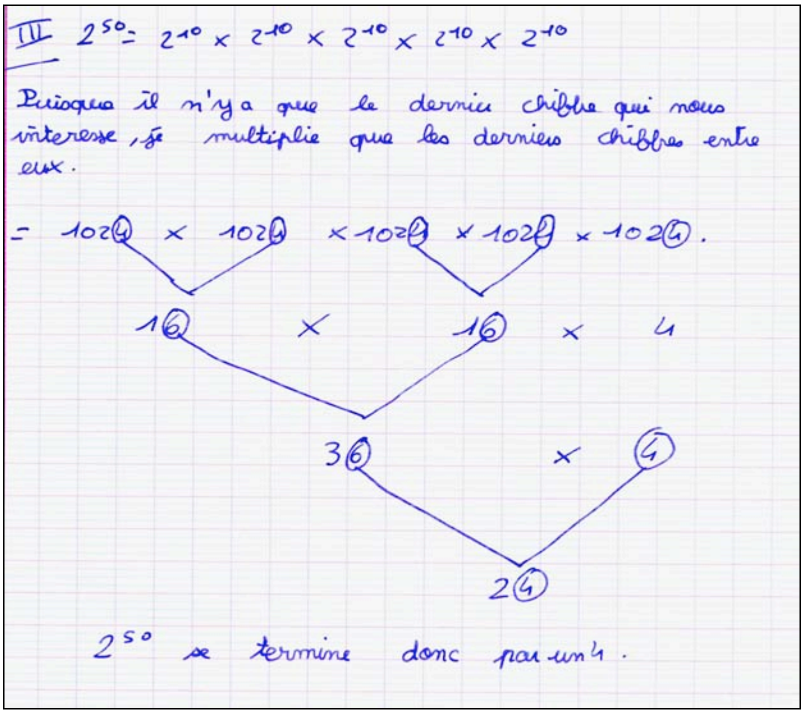
$2^{50} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$

Alors $2^{10} = 2^5 \times 2^5 = 32 \times 32$
$= 1024$

donc $2^{50} = 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024$

2^{50} se termine par 4.

- Élève F :



III $2^{50} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$

Puisque il n'y a que le dernier chiffre qui nous interesse, je multiplie que les derniers chiffres entre eux.

$= 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024.$

$16 \times 16 \times 4$

36×4

24

2^{50} se termine donc par un 4.

Voici la solution que pensait proposer le professeur :

$2^1 = 2$ $2^5 = 32$ $2^9 = 512$

2_ = 4 $2^6 = 64$ $2^{10} = 1024$

$2^3 = 8$ $2^7 = 128$ $2^{11} = 2048$

$2^4 = 16$ $2^8 = 256$ $2^{12} = 4096$

Si la puissance est un multiple de 4, c'est-à-dire de la forme 4*n*, alors le dernier chiffre de 2 élevé à cette puissance est 6.
Si la puissance est de la forme 4*n* + 1, le dernier chiffre est 2.
Si la puissance est de la forme 4*n* + 2, le dernier chiffre est 4.
Si la puissance est de la forme 4*n* + 3, le dernier chiffre est 8.
Or 50 = 4 12 + 2 donc le dernier chiffre de 2^{50} est 4.

Voici les commentaires *a posteriori* du professeur :
Aucun de mes élèves n'a fait de raisonnement de ce type. Ma solution est-elle une démonstration ? L'utilisation de n est-elle intéressante pour la suite de l'apprentissage des mathématiques ? Ceci a-t-il été ma première idée car j'ai derrière la tête un joli raisonnement par récurrence ? (bien rassurant celui-là.) Au vu des copies, j'ai projeté des solutions d'élèves qui me semblent plus simples et performantes.

On peut analyser ces productions comme celles du paragraphe c).
On peut constater que deux grands types de démarches ont été utilisés :

1. Celui majoritaire, parmi les productions proposées, qui consiste à décomposer la puissance étudiée en utilisant des diviseurs de 50, 10 et 5 dans un cas ce qui permet un calcul facile à la main, 25 et 2 dans un autre cas ce qui conduit à un calcul réalisable avec les calculatrices courantes au collège. La méthode est élémentaire mais efficace et elle constitue une démonstration.
2. Celui qui consiste à expérimenter sur les premières puissances de 2 et à conjecturer que la suite des derniers chiffres est périodique. Pour devenir une démonstration, un raisonnement par récurrence, dont il n'est évidemment pas question en quatrième, serait nécessaire. C'est aussi, la méthode que le professeur avait pensé proposer à ses élèves. Elle est aussi riche et intéressante que la première pour un travail en classe mais elle est mathématiquement moins efficace à ce niveau de classe.

Le commentaire du professeur enrichit ici l'analyse qu'on peut faire de ce travail.
Ce commentaire, qui fait apparaître le point de vue du professeur avant d'avoir mis ses élèves au travail, permet :
- de prendre conscience du fait que les élèves sont en général, face à un problème ouvert bien choisi, plus imaginatifs et plus performants que ne le prévoit le professeur,
- de comprendre, dès lors, qu'il est indispensable que le problème soit présenté de façon ouverte. Si le professeur le ferme en essayant de guider le travail des élèves pour les diriger vers son propre raisonnement, la situation est compromise pour un certain nombre d'élèves et perd une grande partie de sa richesse.
- de préciser qu'un problème bien choisi est un problème dont tous les élèves peuvent comprendre la question et dans lequel ils peuvent s'engager par des méthodes variées.
- de rappeler l'importance de l'analyse *a priori* que le professeur doit faire avant de proposer un tel exercice à ses élèves. En particulier, envisager les différentes procédures qui leur sont accessibles permet de décider si le choix du problème est pertinent ou non.

2. Le raisonnement dans les différents champs des mathématiques du collège

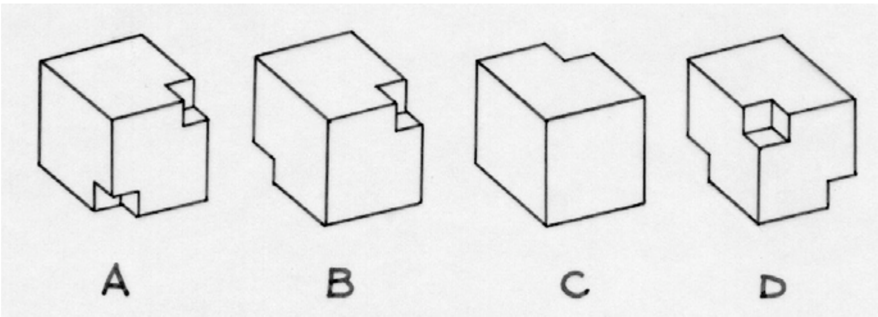
a) Dans le domaine de la géométrie

La géométrie constitue un support privilégié pour la pratique du raisonnement déductif. Mais le raisonnement en géométrie s'appuie aussi sur l'observation et la construction de figures, la mise en place d'expérimentations, de procédures d'essais-erreurs, l'élaboration et la critique de conjectures. Pour le raisonnement mathématique, c'est un domaine riche, varié, présentant un aspect visuel et esthétique, voire ludique, et qui donne lieu à différents types de raisonnement. Pour que l'apprentissage du raisonnement géométrique s'exerce de manière efficace, il ne doit pas se réduire à l'apprentissage formel de la démonstration. À cette fin, les énoncés ne doivent pas être systématiquement donnés sous une forme fermée : « montrer que » suivie d'une propriété apparaissant aux élèves aussi évidente que les hypothèses. L'activité géométrique devient alors pour eux un jeu incompréhensible et stérile.
De plus, le découpage des textes en sous-questions trop détaillées transforme l'élève en ouvrier spécialisé n'ayant à exécuter que des tâches parcellaires dont il ne perçoit pas la cohérence et ne laisse pas une part assez grande à l'initiative, l'inventivité ou la maîtrise de la complexité. Identifions à présent différents types de raisonnements à partir de situations géométriques, chacun étant assorti d'un ou plusieurs exemples.

❖ ***Raisonnement par disjonction de cas***

Exercice 8, à partir de la sixième[3] :

Ces dessins représentent quatre cubes en bois dont certains coins ont été évidés.
Deux seulement de ces solides sont identiques. Dire lesquels.



❖ ***Infirmation par production d'un contre-exemple***

C'est l'occasion de travailler sur le sens des énoncés mathématiques et la quantification universelle implicite.

Exercice 9, à partir de la sixième :

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- Deux rectangles de même périmètre ont aussi la même aire.
- Deux rectangles de même aire ont aussi le même périmètre.

Exercice 10,

Si le triangle $A'B'C'$ a deux côtés égaux respectivement à deux des côtés du triangle ABC et un angle égal à l'un des angles du triangle ABC, peut-on conclure à l'égalité des troisièmes côtés des deux triangles ?

[3] d'après un exercice de « Mathématiques sans frontières »

❖ *Raisonnement par l'absurde*

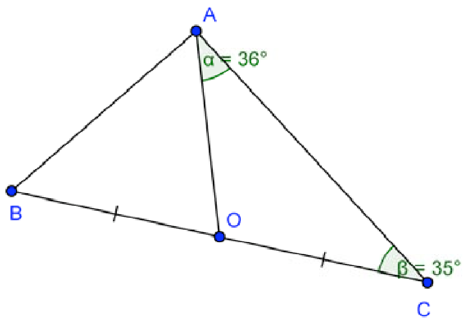
Le raisonnement par l'absurde est pratiqué par le professeur, comme forme plus simple d'un raisonnement par contraposée, par exemple pour démontrer la réciproque du théorème de Pythagore.

> Si l'on considère un triangle ABC tel que AB = c, AC = b et BC = a, avec $a^2 = b^2 + c^2$, il s'agit de démontrer que le triangle est rectangle « en A ». Pour cela, ***on suppose qu'il ne l'est pas*** et on trace la droite D perpendiculaire à AB en A. Sur cette droite, il existe deux points C_1 et C_2 tels que $AC_1 = AC_2 = b$ et on a, d'après le théorème de Pythagore direct $BC_1 = BC_2 = a = BC$. Le point C est donc à l'intersection des cercles C_1 de centre A et de rayon b et C_2 de centre B et de rayon a. Ces deux cercles se coupant en C_1 et C_2, le point C est l'un des deux, le triangle ABC est donc soit ABC_1 soit ABC_2 donc est rectangle en A, d'où la contradiction.

Pour les élèves, toujours dans la configuration de Pythagore, mais pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle, on utilise le raisonnement par l'absurde comme forme plus accessible d'un raisonnement par contraposée. Pour démontrer qu'un triangle ABC tel que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ n'est pas rectangle en A, il est plus facile d'exprimer la preuve sous la forme :

« Si ABC était rectangle en A, on aurait $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ce qui est absurde,
puisque l'on sait que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ ».

Exercice 11, à partir de la cinquième :



Si A' est le symétrique de A par rapport à O, le quadrilatère $ABA'C$ est-il un rectangle ?

❖ *Raisonnements liés à une construction géométrique*

Dans ces exercices, il s'agit de faire le lien entre une description par un texte mathématique et une figure géométrique codée. La construction peut être décrite pas à pas (exercice 12) ou être implicite (exercice 13) :

Exercice 12, à partir de la sixième :

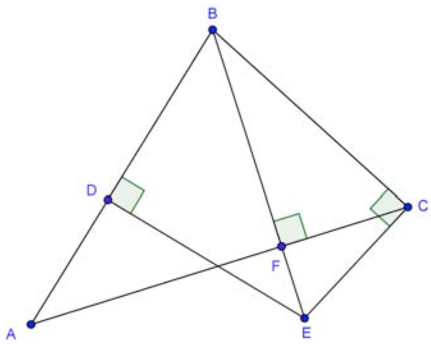
> 1. Tracer un carré ABCD et placer un point E sur le segment [AB] au 1/8 de la longueur à partir de A.
> 2. Reporter AE sur [BC] à partir de B ; on obtient le point F.
> 3. Reporter AE sur [CD] à partir de C ; on obtient le point G.
> 4. Reporter AE sur [DA] à partir de D ; on obtient le point H.
> 5. Tracer le carré EFGH.
> 6. Recommencer les opérations à partir du carré EFGH, c'est-à-dire prendre un point au 1/8 de [EF], etc. jusqu'à obtenir un nouveau carré dans lequel on recommence …

Exercice 13, à partir de la quatrième :

Si $\mathcal{C}$ est un cercle et M un point extérieur au cercle, tracer une tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point .

Exercice 14, à partir de la quatrième :

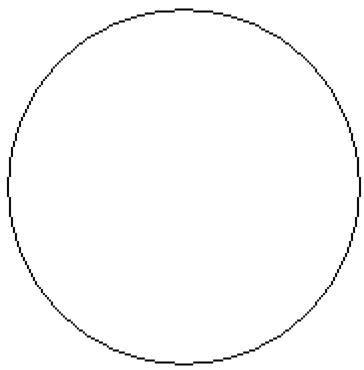
On donne la figure codée ci-contre.
Écrire un énoncé permettant de la construire.



Dans cet exercice, il s'agit d'analyser une figure codée afin de produire une consigne de construction : l'élève doit identifier en particulier l'ordre et les modalités des constructions.
On peut compléter un tel exercice en demandant à l'élève d'imaginer des questions à poser à partir de cette figure.

Exercice 15[4], à partir de la sixième :

Construire le centre du cercle donné ci-contre, en laissant apparents les traits de construction.



Cet exercice permet la mise en œuvre de différentes stratégies :

- Milieu d'une corde de longueur maximale (utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, d'un compas, d'une règle graduée).
- Milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle inscrit dans le cercle.
- Intersection des diagonales d'un rectangle inscrit dans le cercle.
- Milieu d'une corde perpendiculaire à deux tangentes parallèles ; (méthode dite « du pied à coulisse »).
- Intersection des médiatrices de deux cordes (méthode experte disponible dès la 6^e).

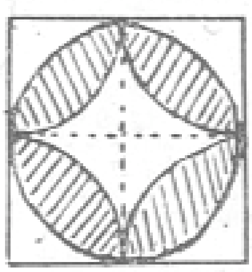
Ces méthodes dépendent du niveau de l'élève, de son aptitude à expérimenter et de son imagination.

[4] issu de la banque d'exercices pour le socle

Exercice 16[5]**,** à partir de la cinquième :

Dans un carré de 56 cm de périmètre, on inscrit un cercle. Des 4 sommets du carré on trace des quarts de cercle, selon le schéma ci-contre.

1- Construire la figure à l'échelle 1/2.
2- Calculer l'aire de la surface hachurée (qui représente un motif décoratif sur une boiserie ancienne).



Dans cet exercice, la construction demandée nécessite des calculs préliminaires (passage du périmètre au côté, application d'une échelle).
Le fait d'avoir réalisé la construction est un élément facilitateur pour le calcul qui suit.

b) Dans le domaine du calcul

Alors que le raisonnement en mathématiques au collège est traditionnellement associé à la résolution de problèmes géométriques, le champ numérique donne la possibilité d'engager des activités déductives sur des supports d'une autre nature pouvant susciter l'intérêt d'élèves plus à l'aise dans ce domaine.
Il offre de plus un contexte privilégié pour explorer des modes de raisonnement diversifiés : déductif, par l'absurde, contre-exemple, disjonction de cas, etc.

Les exemples suivants illustrent cette diversité à travers des situations pouvant parfois donner lieu à plusieurs types de raisonnement.[6]

❖ *Contre-exemples*

Parallèlement au travail mené dans les classes pour convaincre que la vérification d'un ~~énoncé~~ par quelques exemples ne suffit pas à prouver que celui-ci est vrai, il importe de sensibiliser les élèves au concept de contre-exemple. L'arithmétique procure de nombreuses situations parfaitement adaptées à la mise en œuvre d'un raisonnement simple.

Exercice 17, à partir de la cinquième :

La somme des chiffres de 42 est un multiple de 6 et 42 est un multiple de 6 (idem pour 84). Peut-on en déduire que si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 6, alors ce nombre est un multiple de 6 ?

Exercice 18, à partir de la quatrième :

Vrai ou faux : pour tout entier n, l'entier $n^2 - n + 11$ n'admet que deux diviseurs

Ce dernier exercice, propice à mettre en œuvre une démarche d'investigation, donne également l'occasion d'engager la réflexion sur le caractère universel d'une propriété.
Certains problèmes ouverts favorisent de plus un travail sur la notion de réciproque.
On peut, par exemple, se demander si la « preuve par 9 » garantit l'exactitude du résultat obtenu.

[5] D'après un exercice de certificat d'études primaires
6 On trouvera d'autres exemples dans le document « Initiation au raisonnement » (académie de Bordeaux, mars 2003) ; http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/profplus/publica/public.htm

Exercice 19, à partir de la cinquième :

1- Si deux entiers sont multiples de 7, leur somme est-elle un multiple de 7 ? et leur différence ?
2- Si la somme de deux entiers est multiple de 7, ces deux entiers sont-ils multiples de 7 ?
3- Si la somme et la différence de deux entiers sont des multiples de 7, ces deux entiers sont-ils multiples de 7 ?

Exercice 20, à partir de la cinquième :

1- Démontrer que si un nombre est multiple de 60, alors il est multiple de 6 et de 15.
2- La réciproque est-elle vraie ?

De la même façon, le recours à un contre-exemple constitue un moyen efficace et formateur pour réfuter certaines identités ou règles de calcul : en ajoutant le même nombre au numérateur et au dénominateur d'une fraction, obtient-on une fraction égale ? La racine d'un produit est-elle égale au produit des racines ? etc.
Ce type d'activités donne l'occasion de conforter le principe selon lequel une propriété n'est validée que si elle est vraie dans tous les cas possibles.

De plus, les raisonnements mis en œuvre dans le domaine numérique peuvent consolider la représentation des nombres : étant donnés deux nombres décimaux m et n tels que m a pour arrondi 13 et n pour troncature 12, peut-on affirmer que m est supérieur à n ?

❖ *Raisonnement par l'absurde*

Certaines questions courantes du domaine numérique sont traitées grâce à un raisonnement par l'absurde.
On démontre ainsi qu'en divisant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, on obtient une fraction irréductible.
Des considérations sur les produits en croix permettent de se prononcer sur l'égalité de deux fractions comme $\frac{941664}{665857}$ et $\frac{665857}{470832}$.

Les problèmes à support concret ou issus d'autres disciplines peuvent également donner lieu à un raisonnement, par exemple autour du thème de la proportionnalité, en faisant éventuellement intervenir des arguments graphiques.

Exercice 21, à partir de la cinquième :

À partir du tableau ci-dessous, peut-on dire que la distance d'arrêt d'un véhicule est proportionnelle à sa vitesse ?

Distance d'arrêt (en m)	14	28	79
Vitesse (en km/h)	30	60	90

❖ *Disjonction de cas*

Comme cela a déjà été vu plus haut à propos du caractère non décimal de racine de deux, la disjonction de cas est un mode de raisonnement efficace pour résoudre dès le collège certains problèmes qui seront traités d'une autre façon à un autre niveau.

Exercice 22, à partir de la cinquième :

> 1- Si deux nombres sont multiples de 3, alors leur produit est multiple de 3.
> 2- Si deux nombres ne sont pas multiples de 3, alors leur produit n'est pas multiple de 3.

Ce type de raisonnement permet de démontrer des propriétés des nombres entiers par des procédés s'apparentant aux congruences : n (n+1) (2n+1) est-il un multiple de 3 ?
Il peut aussi être utilisé dans certains cas pour résoudre des systèmes d'équations ou d'inéquations à inconnues entières.

En vue d'un travail sur les ordres de grandeur et sur certaines règles opératoires, on peut proposer de déterminer le résultat d'une opération sans utiliser de calculatrice, ni poser d'opération, sous forme d'un QCM. Par exemple :

Combien vaut 241 × 5,7 : 133,7 ; 1373,7 ; 13773,7 ; 256,7 ?

❖ *Calcul littéral*

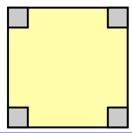
Le calcul littéral constitue en lui-même un mode de raisonnement, grâce auquel on dépasse le stade de l'investigation sur quelques cas particuliers pour accéder au niveau de la généralisation.
C'est par exemple une démarche naturelle pour s'assurer de l'exactitude d'une conjecture émise dans le cadre d'un programme de calcul.

Le calcul littéral permet de démontrer certaines propriétés arithmétiques (la somme de deux nombres pairs est paire, etc.).
Il donne par ailleurs la possibilité d'activités spécifiques amenant à un travail sur les notions de propriété directe et de réciproque, en particulier lors de la résolution d'équations ou d'inéquations.
Dès la classe de cinquième, la pratique de tests d'égalité peut amener à se poser des questions du type : si $x = 15$ et $y = 12$, alors $2x + y = 42$, mais l'égalité $2x + y = 42$ entraîne-t-elle que $x = 15$ et $y = 12$?

Le calcul littéral est utilisé dans la résolution de problèmes à support concret, comme par exemple celui du volume d'une boîte réalisée à partir d'un carré tronqué en chacun de ses coins.

Exercice 23, à partir de la quatrième :

> Combien doit mesurer le côté du carré que l'on découpe dans chaque coin d'un carré de côté 10 pour que le volume de la boîte soit maximal ?



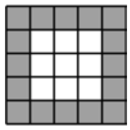
Dans cet exemple, une approximation de la réponse pourra être obtenue à partir de considérations graphiques ou en faisant appel à un tableur. Le recours à la notion de fonction permettra de formaliser le problème, préparant ainsi l'approche qui sera plus tard envisagée au lycée.

Comme suggéré dans le document ressource sur le calcul littéral[7], il importe d'avoir à l'esprit que, selon les cas, la lettre est utilisée dans les calculs avec des statuts différents : variable, indéterminée, inconnue ou paramètre. Dans ce dernier document, l'exemple développé en pages 1 et 2 met en évidence plusieurs usages possibles de la lettre autour d'une même situation.

[7] « Ressources pour les classes du collège - Du numérique au littéral au collège » (DGESCO, février 2008)

Exercice 24, à partir de la cinquième :

> Trouver un moyen permettant de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.[8]



c) Le raisonnement dans le domaine de la gestion de données, des probabilités et des statistiques

Cette partie du programme mobilise des raisonnements très variés qui ne se formalisent pas souvent sous la forme de démonstrations.

Il s'agit essentiellement de rationaliser des décisions ou des choix, d'argumenter des affirmations ou d'exercer son esprit critique, en procédant au traitement ou à l'analyse de données brutes ou de représentations graphiques.

Pour cela, les différents raisonnements nécessitent souvent des allers-retours entre des représentations graphiques et des données numériques, voire des informations figurant dans un texte. Il s'agit alors de sélectionner les informations pertinentes et de les mettre en relation. Ces raisonnements sont constitutifs de la culture mathématique du citoyen qui est amené à mobiliser ses connaissances mathématiques pour argumenter ses affirmations, ses choix ou ses décisions.

Le domaine des probabilités permet d'aborder des raisonnements nouveaux au collège pour décider ou choisir en situation d'incertitude.

- ***Gestion de données, fonctions***

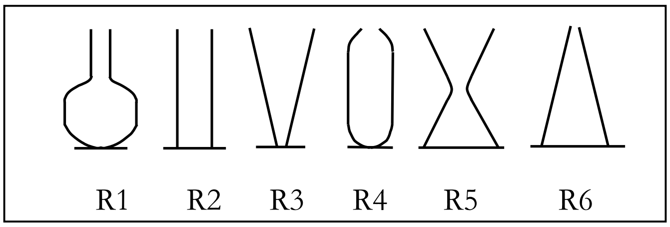
Ce premier exemple est illustratif de plusieurs situations (cf. document ressource sur le socle) où le raisonnement consiste à traduire graphiquement une variation en lien avec la notion de pente. Ces situations se prêtent volontiers à des échanges oraux amenant les élèves à expliciter leurs raisonnements pour argumenter leurs choix.

[8] « Les débuts de l'algèbre au collège », Combier, Guillaume, Pressiat (INRP, 1996)

Exercice 24, à partir de la quatrième[9] :

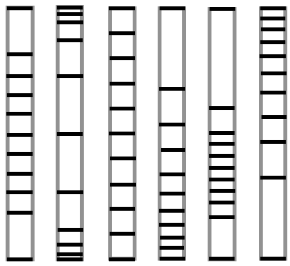
Vu à la Cité des Sciences et de l'Industrie à Paris.

« Six réservoirs de formes différentes, de même volume, de même hauteur se remplissent dans le même temps. Il s'agit d'associer à une forme de récipient une jauge et une courbe indiquant la hauteur du liquide en fonction du temps. »
Les graduations des six jauges A, B, C…indiquent les hauteurs de liquide correspondant à 1 litre, 2 litres… pour les six réservoirs. Les courbes 1, 2, 3… indiquent la hauteur atteinte par le liquide en fonction du temps lorsque les six réservoirs se remplissent.

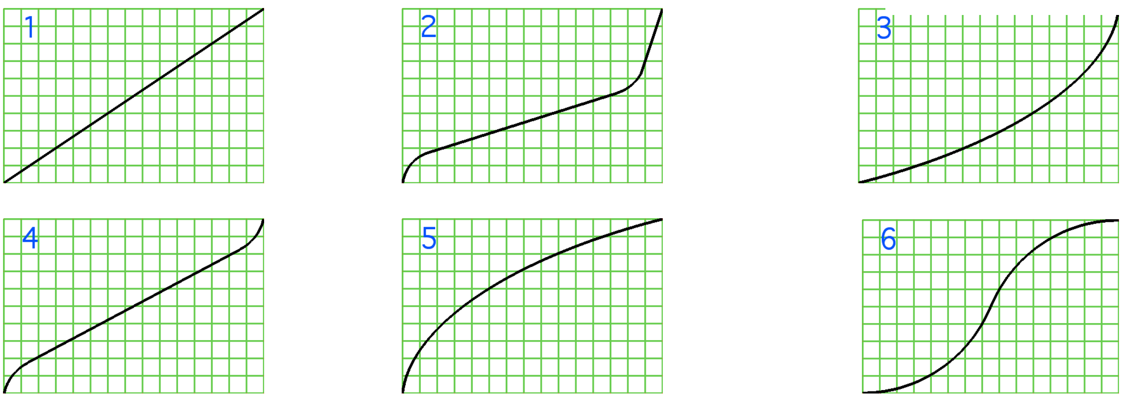


Les récipients ont tous le même volume 10 litres et la même hauteur. Leurs formes sont représentées grossièrement par les dessins ci-dessus. Pendant le remplissage, le débit de l'eau est constant et identique d'un récipient à l'autre. Ainsi, à un instant donné, le volume d'eau contenu dans chaque récipient est le même mais la hauteur d'eau n'est pas nécessairement la même.

Associer à chaque récipient R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 :
a. la jauge qui lui correspond (parmi les jauges reproduites ci-contre) ;
b. la courbe qui lui correspond (parmi les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6 reproduites ci-après).



A B C D E F



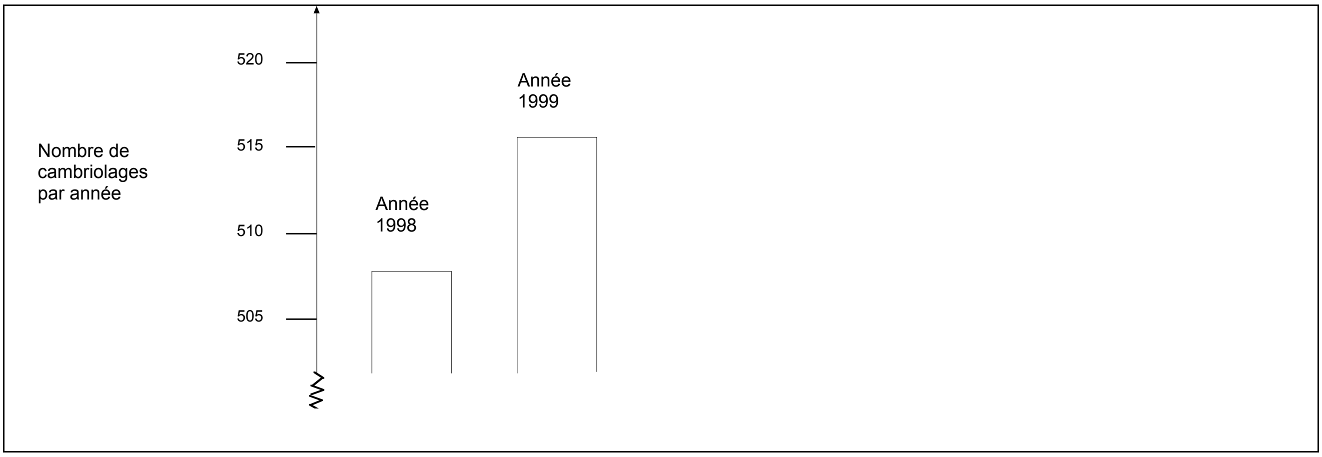
[9] Extrait du CRPE, session 2006, groupe 5.

❖ *Statistiques descriptives*

L'exemple ci-dessous conduit à raisonner sur les écarts absolus et les écarts relatifs à partir d'un graphique tronqué.

Exercice 25, à partir de la cinquième[10] :

Lors d'une émission télévisée, un journaliste tient les propos suivants : « Ce graphique montre qu'il y a eu une très forte augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999. »
Considérez-vous que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte du graphique ?
Justifiez votre réponse par une explication.



Il importe toutefois, pour que ces distinctions entre variations absolues et variations relatives prennent sens, de proposer aussi des situations où ce type de graphique tronqué est pertinent, en particulier pour manifester des variations absolues qui seraient invisibles avec une représentation complète. C'est par exemple le cas lorsqu'on représente l'évolution sur les dernières années de l'espérance de vie à la naissance (cf. www.ined.fr).

Ce deuxième exemple mobilise des raisonnements destinés à imaginer et organiser le travail pour décoder un message à partir d'informations statistiques.

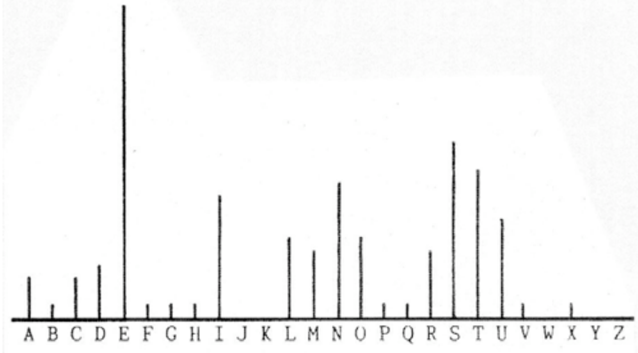
Exercice 26, à partir de la cinquième[11]

Voici une citation. Chaque lettre de l'alphabet a été remplacée par un signe. La ponctuation et les espaces ont été supprimés.

4+□*5××+ □△→3□□+△★+★●+×+↾↼+△★431↼+□+★+⇂
→↾■+△●↼53★□4+□●3□★3△☆★35△□□5☆3→4+□△+⊙
+↾6+△★+★↼+25△●++□▼↾+□↾↼4↾★343★+☆5××↾△+

Décoder cette citation en utilisant le diagramme en bâtons qui indique la fréquence d'apparition de chaque lettre dans le texte.

[10] D'après une épreuve PISA
[11] D'après Maths sans frontières



Il est par ailleurs formateur de confronter les élèves à des données réelles car leur étude mobilise des raisonnements variés, notamment pour comprendre des tableaux de données ou pour mettre en relation des données avec des représentations graphiques ou des indicateurs statistiques. On trouvera sur le site de l'INSEE (http://www.insee.fr) ou sur celui de l'INED (www.ined.fr) de très nombreuses informations chiffrées.
On peut par exemple interpréter les positions relatives de la moyenne et de la médiane d'une série statistique (salaire moyen et salaire médian, âge moyen et âge médian etc.) ou bien demander aux élèves de modifier, à l'aide d'un tableur, certaines données d'une série de sorte que la moyenne devienne supérieure à la médiane ou l'inverse. Des raisonnements par essais et erreurs peuvent alors être mis en œuvre.

Enfin, on peut examiner ce problème qui mobilise des raisonnements déductifs, après avoir, le cas échéant, procédé par essais et erreurs sur des exemples : on considère deux séries de données numériques S et S' et on se demande s'il est possible de choisir un élément de la série S de sorte qu'en l'adjoignant à la série S' les deux moyennes baissent. Il est alors intéressant de rechercher une condition nécessaire et suffisante.

❖ *Probabilités*

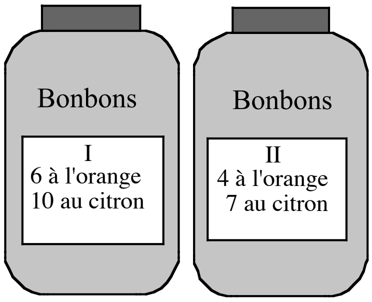
Les raisonnements dans le domaine des probabilités permettent de guider des choix ou des décisions. Ce sujet suscite volontiers l'intérêt des élèves qui peuvent s'impliquer dans des choix et disposer d'outils pour les valider ou les réfuter (simulation ou calcul de probabilités).

L'exemple suivant est essentiellement fondé sur la notion de proportion, qui se traduit ici en termes de probabilités. Les effectifs de bonbons ont été choisis de sorte que le pot contenant le plus de bonbons au citron soit celui qui en ait la moindre proportion.
Il va de soi que les probabilités étant très proches, une simulation de cette situation nécessiterait un nombre important de tirages avec remise pour que la différence entre les deux pots soit perceptible.

Exercice 27, en troisième[12] :

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.
Dans un deuxième pot, elle met 4 bonbons à l'orange et 7 au citron.
Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon. Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :
« Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur. »

Julien réfléchit et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.
À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ? Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.



Enfin, cette dernière situation propose de décider d'une stratégie de jeu en s'aidant d'un calcul de probabilités.

Exercice 28, en troisième[13] :

On dispose de trois cartes de même format. La première a deux faces bleues, la deuxième a deux faces rouges et la dernière une face bleue et une face rouge. Quelqu'un choisit au hasard une carte puis la pose sur la table en choisissant au hasard la face visible. Le joueur doit « deviner » la couleur de la face cachée. Quelle stratégie lui conseiller ? Toujours choisir la couleur vue ? Toujours choisir l'autre couleur ? Choisir au hasard la couleur ?

Une expérimentation ou une simulation, suivie d'un calcul de probabilités permettent de justifier ce choix.

3. Raisonnement et évaluation

Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer sont des capacités qui relèvent du socle commun de connaissances et de compétences et qui sont à acquérir progressivement, tout au long de la scolarité au collège.
L'évaluation de ces capacités s'effectue dans le cadre d'une réponse à une question posée ou, plus largement, d'une résolution de problèmes. C'est pourquoi, les modalités d'une telle évaluation ne diffèrent pas de celles relatives à l'évaluation ordinaire d'un savoir ou d'un savoir-faire. Elles sont diverses et induites, notamment, par les réponses aux questions suivantes.

[12] Extrait du Rallye Mathématique Transalpin année scolaire 2005-2006
[13] Issu de www.statistix.fr

a) Qui valide, qui évalue le raisonnement, la démarche ?

Le professeur, l'élève lui-même, un autre élève ou un groupe d'élèves

- ***Évaluation de raisonnements par le professeur :***

Ce procédé est porteur d'apprentissage à la condition d'un dialogue effectif entre l'élève et le professeur quant aux procédures utilisées, au raisonnement suivi : un retour aux productions et un travail sur l'erreur s'imposent. Cela est vrai dans le cadre d'une évaluation diagnostique ou formative pour accéder aux représentations des élèves. Par exemple, suite à un item non réussi d'un QCM, permettre à l'élève de se justifier : « *j'ai mis que c'était proportionnel car plus on vieillit, plus on grandit* » montre à l'enseignant que cet élève associe proportionnalité à croissance et lui donne des pistes de remédiation. Mais cela reste vrai également lors d'une évaluation sommative. Ainsi, proposer systématiquement des exercices du type « Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse. » permet d'accéder aux raisonnements suivis par les élèves et ce, loin de toute formalisation attendue.

- ***Évaluation de raisonnements par l'élève lui-même :***

Cela est rendu possible par le choix des situations proposées, en l'occurrence, celles qui proposent de façon intrinsèque une validation de la procédure utilisée ou du raisonnement suivi (on peut ou non reconstituer le puzzle agrandi[14], on trouve une somme identique ou non pour chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale d'un carré magique, on fait bouger le sommet M d'un quadrilatère à l'aide de la souris et celui-ci reste à l'écran un parallélogramme,…).

- ***Évaluation de raisonnements par un autre élève ou un groupe d'élèves :***

Celle-ci est rendue possible par l'instauration d'un débat entre pairs pour résoudre le problème posé dans lequel celui qui a la parole doit confronter son raisonnement à ceux des autres et convaincre ceux-ci de sa pertinence (au sein du groupe-classe ou des groupes de travail constitués).

b) Quel « support » choisi (écrit, oral) ?

- ***Évaluation de raisonnements à partir de traces écrites :***

Deux principes sont essentiels :

• ***On distingue le fond de la forme :***

Comme il a déjà été dit en introduction, la mise en forme de la production d'une preuve ne doit pas donner lieu à un formalisme excessif et/ou prématuré. Cela est vrai au cours de l'apprentissage et, *a fortiori*, lors d'une évaluation sommative. Par conséquent, il y a lieu de distinguer l'évaluation du raisonnement proprement dit de sa mise en forme[15].

• ***On valorise les écrits intermédiaires :***

Des raisonnements écrits sont demandés lors de la résolution de problèmes. Toute solution incomplète et/ou partiellement erronée doit être prise en compte. Autrement dit, il y a lieu de valoriser les réussites partielles des élèves telles que :

- raisonnement exact mais résultat final erroné,
- ébauche de raisonnement avec texte, figure codée ou schéma,
- présence explicite de pistes de résolution mais travail non abouti,

---

[14] Il s'agit de la situation d'agrandissement d'un puzzle, activité devenue classique de Guy Brousseau et décrite dans le numéro 2.1 de la revue Recherches en didactique des mathématiques, La pensée sauvage, 1981.

[15] On pourra se reporter utilement au document ressource pour le socle commun dans lequel, notamment, des exemples de situations sont développés dans la partie « qu'évalue-t-on dans la résolution de problèmes ?

- mobilisation de la « bonne » opération mais erreurs de calcul,
- …

À ce sujet, on peut lire dans le document ressource pour le socle commun : « *Il y a donc nécessité d'évaluer distinctement chacune des différentes capacités. En particulier, ce n'est pas parce que le résultat est faux ou que l'élève n'a pas trouvé le résultat escompté qu'il a « tout raté ». Il va donc falloir analyser les écrits imparfaits des élèves, leurs solutions erronées, leurs essais inaboutis pour extraire des éléments positifs d'évaluation de certaines capacités du socle commun.* »

❖ Évaluation de raisonnements exprimés oralement :

Pour éviter de bloquer les élèves avec des exigences trop fortes dans les mises en forme écrites, le recours à l'oral pour des évaluations ponctuelles s'avère pertinent.

Par exemple, lors de la résolution d'un problème en classe, la réponse orale d'un élève peut permettre au professeur de valider, de façon annexe, telle ou telle compétence dans le cadre du socle commun de compétences. Concrètement, un élève en difficulté qui produirait une réponse orale du type : *« j'ai trouvé 13 car j'ai fait Pythagore et ça m'a donné 25 + 144 égale à 169* » donnerait l'opportunité au professeur de lui valider les capacités à « identifier un problème et mettre au point une démarche de résolution » et à « utiliser la propriété de Pythagore pour traiter une situation simple »[16].

[16] Il est indiqué, en page 13, du document « livret de connaissances et de compétences, grille de référence » (http://eduscol.education.fr/D0231/Grille_pilier3.pdf) que « l'exigence porte sur la capacité à mobiliser une propriété pour élaborer une déduction simple » et « l'évaluation s'effectue oralement ou en situation, sans exigence particulière de formulation des justifications ».

ANNEXE : Le raisonnement en mathématiques et ailleurs

1. Raisonnement et pratique sociale

Si le terme « Opinion » ne prête guère à discussion, il n'en va pas de même des termes « argumentation » et « raisonnement » qui font l'objet de définitions multiples. Selon G. Gauthier[17], « une opinion est une proposition démunie de justification, c'est un point de vue, une thèse, un jugement, une position ou toute autre chose semblable, mise en avant sans être appuyée par quelque motif, motivation ou autre genre de raison […] Un argument se distingue d'une opinion en ce qu'il consiste en un ensemble articulé d'une proposition et d'une ou plusieurs justifications ».

« Argumenter concerne le monde des opinions où s'expriment des thèses de toute espèce sur tout ce qui peut être objet d'une discussion : jugement de valeur, bien fondé d'une décision, justesse d'une prise de position [...] argumenter consiste à justifier la préférence que l'on accorde à telle ou telle façon de voir et que l'on cherche à faire partager[18] ». Convaincre et persuader constituent deux grandes visées de l'argumentation. « Celui qui cherche à convaincre s'attache au cheminement des raisons dans le but d'obtenir l'adhésion réfléchie de son auditoire ». Même s'il ne s'adresse qu'à un seul auditeur ou lecteur, il vise à travers celui-ci un destinataire plus général. « Celui qui veut persuader cherche à obtenir une adhésion spontanée et affective de son destinataire ». La persuasion vise un destinataire particulier, individu ou groupe, dont on sollicite les attentes, les rêves ou les émotions.

L'argumentation commune vise plus à persuader par des procédés rhétoriques, par accumulation d'arguments, qu'à convaincre par des arguments de raison, c'est le cas par exemple de la publicité.

Pour ce qui est de la distinction entre argument et raisonnement, nous adopterons ici le point de vue de S. Toulmin[19], selon lequel un raisonnement est un type particulier d'argumentation. « Un raisonnement est une opération discursive par laquelle on conclut qu'une ou plusieurs propositions (prémisses) impliquent la vérité, la probabilité ou la fausseté d'une autre proposition (conclusion)[20] ». Ainsi, le raisonnement apparaît comme indissociable de la notion de vérité et de la volonté de convaincre.

Le raisonnement n'est pas unique, on distingue différents types qu'on retrouve aussi bien dans les pratiques sociales que dans les différents champs disciplinaires. Les plus fréquemment utilisés dans la vie courante sont la déduction, l'induction, l'analogie et l'induction.

« On qualifie un raisonnement de déductif lorsqu'il énonce logiquement une conclusion nécessaire à partir de propositions données[21] ». Au quotidien, la conclusion formule expressément une information déjà virtuellement contenue dans les prémisses. C'est le cas lorsque « Sherlock Holmes déduit du fait que le meurtre du rabbin a eu lieu un samedi que son assassin n'est pas juif pratiquant[22] ».

L'induction est la « formulation d'un énoncé général à partir de la constatation d'un ensemble de faits particuliers[23] ». Cette forme de raisonnement est d'une pratique courante tant dans la vie quotidienne que dans le discours politique.

Ce qui distingue essentiellement ces deux types de raisonnement, c'est que la déduction est générale dans ses prémisses alors que l'induction l'est dans sa conclusion.

---

17 G. Gauthier, *Les langages du politique*, revue Mots, n°78, juillet 2005

18 *Document d'accompagnement du programme 2001, Français, classes de seconde et de première,* Collection Textes de référence, SCEREN (CNDP).

19 Stephen. Toulmin, 1993, *Les usages de l'argumentation,* Paris PUF.

20 André Lalande, philosophe, 1863-1967

21 G. Durozoi et A. Roussel, 2002, *Dictionnaire de philosophie,* Paris, Nathan

22 A. Lercher, 1985, *Les mots de la philosophie,* Paris, Belin

23 A. Bienvenu, 2003, « *Déduction* », in *Grand dictionnaire de la philosophie*, Paris, Larousse et CNRS éditions

Dans la vie courante, il est fréquent qu'un raisonnement déductif soit développé de manière abrégée, certains de ses éléments n'étant pas explicités. C'est le cas dans le raisonnement suivant qui pouvait être tenu il y a peu encore, quand EDF était une entreprise nationalisée.

> « Les profits d'EDF appartiennent au gouvernement et donc à l'ensemble de la collectivité. Ils ne doivent pas servir à subventionner les consommateurs qui choisissent l'électricité plutôt qu'une autre énergie pour se chauffer ».

Dans ce discours manque la proposition qui permet d'articuler la prémisse et la conclusion, à savoir : « Quand des profits appartiennent à l'état, ils ne doivent pas servir à subventionner un groupe de consommateurs ».
Cette attitude se retrouve dans la classe de mathématique, où l'élève a du mal à faire la part des choses entre sa pratique de la vie courante qu'il transfère au cours de mathématique et le contrat de classe installé par l'enseignant qui lui, évolue au cours de l'apprentissage.
Ainsi, en début de l'enseignement de la notion de parallélogramme, le professeur exigera une production qui peut s'énoncer de la manière suivante : ABCD est un parallélogramme, les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur, donc AB = CD. Alors que, lorsque la question ne sera plus problématique, il se satisfera de : ABCD est un parallélogramme, donc AB = CD.

Le raisonnement par analogie consiste à tirer des conclusions d'une ressemblance entre les objets sur lesquels on raisonne. Faisant valoir que l'élément comparé (celui sur lequel on cherche à produire des connaissances) est analogue à l'élément de comparaison (celui sur lequel on possède déjà des connaissances) sous un ou plusieurs aspects donnés, l'analogie stipule qu'il doit aussi l'être sous l'aspect qui est objet d'étude. Le raisonnement par analogie est de tous les modes de raisonnement le plus spontané, le plus naturel à l'enfant mais, bien souvent par manque de réserve dans les conclusions, celui-ci va d'un bond aux affirmations les plus téméraires. C'est ainsi le cas lorsque partant du constat que par leurs formes, leurs révolutions…, les planètes sont analogues à la Terre, il conclut qu'elles doivent être habitées comme la Terre. Mais l'analogie peut être féconde, il en a été ainsi pour B. Fanklin à qui il a semblé que les étincelles d'une machine électrique étaient analogues à ce que l'éclair est en grand. La circonspection, la méthode avec la mise en place d'expériences, la précision dans l'examen, lui ont permis de vérifier dans les détails l'identité soupçonnée.

L'induction consiste à formuler les explications les plus plausibles à partir de faits constatés. Les explications ainsi formulées sont incertaines et peuvent être retirées si elles deviennent inconsistantes avec de nouvelles informations. L'exemple qui suit éclaire cette définition : « Si on observe un gazon mouillé, on peut supposer que la cause en est la pluie ou un arrosage à l'aide de gicleurs. Si on remarque ensuite que la rue adjacente est sèche, alors on doit éliminer l'hypothèse de la pluie ».
L'induction est une forme de raisonnement communément utilisée tant dans notre pratique la plus quotidienne que dans la découverte scientifique. Pour preuve, ces quelques exemples :

- Des fossiles en forme de poisson ont été trouvés au milieu des terres. La mer devait autrefois aller jusque là.
- Tiens, Jean n'est pas encore arrivé : il a dû être retenu au bureau, ou alors il aura été pris dans des embouteillages.
- La formulation de diagnostics dans le domaine médical ou autre.
- Les méthodes d'investigation utilisées dans les enquêtes policières.
- L'enseignant qui analyse une erreur faite par un élève en vue d'apporter une réponse appropriée, recourt à l'induction pour émettre des hypothèses plausibles sur l'origine de l'erreur, de la démarche intellectuelle de l'élève qui a conduit à cette erreur. Il doit ensuite mettre en place les tests qui lui permettront de choisir entre les différentes hypothèses.

2. Le français et les sciences humaines

a) Le français

Concernant les acquisitions grammaticales, le programme de français pour le collège suggère une démarche inductive : observation d'un texte ou d'un corpus de textes, repérage guidé par des questions d'un certain nombre d'éléments, mise en évidence à partir de ces éléments du fait grammatical, objet de l'étude et enfin mise en application immédiate de la notion découverte. Lors de la production d'un texte ou de l'écriture d'un texte sous la dictée, comme par exemple pour accorder un participe passé, l'élève doit repérer les éléments pertinents dans le texte : le genre et le nombre du sujet, le sens du verbe (transitif ou intransitif), et identifier la règle grammaticale qui s'applique. Son raisonnement est alors de type déductif.

Concernant les formes de discours en début du collège, l'essentiel du travail, tant à l'oral qu'à l'écrit, est axé sur le pôle narratif. Un premier travail est véritablement engagé sur le pôle argumentatif à partir de la classe de quatrième à travers l'étude du discours explicatif. Mais ce n'est qu'avec la classe de troisième que l'initiation à l'argumentation devient un axe directeur du programme. L'accent y est mis sur la prise en compte de l'autre afin d'ajuster le travail d'écriture ou de dialogue aux attentes de celui-ci, c'est l'occasion pour l'élève de percevoir la double dimension rationnelle et affective de l'argumentation. Une direction de travail est l'utilisation d'un exemple pour venir en appui d'un argument, le particulier vient en appui du général dans le but soit de préciser la pensée, soit de renforcer l'argumentation. En fin de collège, on exige seulement la présentation d'une prise de position écrite étayée par quelques arguments et exemples.
Le travail conduit en collège porte principalement sur l'aspect persuasif de l'argumentation, sans exclure totalement l'aspect convaincant. Il faut attendre la classe de seconde pour que soit développée la capacité à rédiger des textes argumentatifs fondés sur des raisonnements déductifs et que les élèves distinguent démontrer et argumenter d'une part, convaincre et persuader d'autre part, qui constituent les principales opérations de l'argumentation.

b) L'histoire et la géographie

« …le discours historique, comme le discours géographique, tend vers la vérité sans en être l'expression avérée : le développement de l'esprit critique […] et la formation du jugement personnel […] sont des objectifs permanents[24]… »
Les programmes font de l'argumentation un objectif de première importance pour le collège en histoire-géographie mais des recherches récentes montrent que, dans la pratique, la mémorisation de savoirs factuels demeure bien souvent la principale activité des élèves. Ils considèrent d'ailleurs l'histoire comme un savoir « donné » par le professeur, une accumulation de faits et de dates à apprendre et à restituer.

Placé en situation d'argumentation en histoire, l'élève va chercher à comprendre une situation, éclairer un fait en procédant par analogie en utilisant soit une situation passée déjà connue de lui, soit la connaissance qu'il a du monde actuel. Plus rarement, il peut lui arriver de recourir à un raisonnement par présomption comme par exemple pour justifier qu'une poignée d'espagnols et de portugais a pu conquérir les empires amérindiens alors que leur nombre et la connaissance du terrain jouaient en leur défaveur. Le raisonnement déductif est également présent pour, à la lumière de documents et de faits établis, produire une information sur une situation particulière.

En géographie, l'étude part de situations particulières ou spécifiques pour ensuite dégager par une démarche inductive des savoirs d'ordre général. La géographie sollicite largement l'analogie pour dégager des similitudes mais aussi des oppositions de situations. Une fois mises en place en classe de

[24] *Histoire, Géographie, Instruction civique, Programmes et accompagnement,* 2000, Collection Enseigner au collège, SCEREN (CNDP).

sixième, les trois planisphères de la répartition mondiale de la population, des grands domaines climatiques et des grands ensembles de reliefs, des mises en relations et un raisonnement déductif permettent à partir du cycle central d'analyser une situation particulière. Pour traiter de l'organisation des territoires, l'histoire peut être sollicitée pour fournir des arguments explicatifs.

3. Les sciences expérimentales et la technologie

a) Les sciences expérimentales

Bien souvent, le point de départ de la démarche scientifique tient en une analogie entre la situation qui est l'objet d'étude et une situation d'un domaine déjà étudié, c'est cette analogie qui guide le choix des observations qui seront faites, des mesures qui seront prises. À partir de cette prise d'informations, des hypothèses vont être formulées, fruit d'un raisonnement inductif qui amène à postuler un principe de fonctionnement, une loi. Un raisonnement déductif permet ensuite d'anticiper les effets observables qu'on devrait obtenir en tenant l'hypothèse pour vraie. Les conclusions de ce raisonnement sont soumises à l'épreuve de l'expérience. Si les résultats des expérimentations sont conformes aux prédictions, l'hypothèse est dite validée, elle est admise comme provisoirement vraie, tant qu'elle résistera à l'épreuve des faits.

L'enseignement au collège consiste à travailler les différentes étapes de la démarche, la validation des hypothèses se faisant soit par recours à l'observation, à la confrontation à des documents ou encore par la mise en place d'expériences. En début de collège, l'accent est mis sur l'observation dans le but de susciter un questionnement, de classer en reliant des faits, de comprendre. L'expérience prend le relais de l'observation quand celle-ci ne suffit plus pour apporter des réponses. Seule la cohérence, et non la vérité, est attendue ; le critère de recevabilité d'un argument étant qu'il possède un pouvoir explicatif pour le problème étudié et qu'il ne soit pas en contradiction avec les acquis.

La géologie constitue un domaine particulier des sciences de la vie et de la Terre où le raisonnement par analogie est sollicité pour comprendre l'activité interne du globe terrestre ou encore pour reconstituer par un raisonnement les phénomènes géologiques anciens à partir de phénomènes actuels.

Un des objectifs de l'enseignement des sciences expérimentales au collège est d'amener l'élève à passer d'une vision assurée mais subjective à une vision relative, probable mais objective qui caractérise l'esprit scientifique.

b) La technologie

« *La démarche technologique est caractérisée par un mode de raisonnement fait de transpositions, de similitudes de situations-problème et d'analogies, adossées à un champ de contraintes pour obtenir une solution*[25] ».

Tout comme dans les disciplines expérimentales, l'élève confronté à un problème est conduit à émettre des conjectures, des hypothèses (recherche d'explications ou de causes). Pour ce faire, l'élève conduit un raisonnement inductif, postulant par exemple à partir de l'observation, un principe de fonctionnement qui expliquerait le résultat d'une action réalisée avec un objet technique. Cette hypothèse est ensuite mise en débat, intervient alors la déduction, et si l'hypothèse résiste à cette étape, elle est soumise à l'épreuve de l'expérimentation pour être validée. Cette démarche est sollicitée dès la classe de sixième où est inscrite au programme l'analyse du fonctionnement d'un objet technique.

Le raisonnement déductif est très présent dans l'activité technologique et sa place va croissant au fil des années de collège. Ainsi, en classe de troisième dans le cadre de conduite d'un projet, l'élève est amené à proposer des solutions techniques. Il doit par exemple effectuer le choix d'un matériau approprié à la réalisation d'un objet, justifier l'enchaînement opérations de réalisation.

Le document d'accompagnement du programme de technologie mentionne que la phase de structuration des connaissances qui clôt l'étude d'une situation d'investigation et de résolution d'un problème technique, est fondée sur une démarche inductive. Les conclusions dégagées qui ont une portée générale le sont à partir du concret et de l'action sur une situation particulière.

[25] *Programme de technologie pour le collège, document d'accompagnement*

Si les deux types de raisonnement inductif et déductif sont sollicités en technologie, le raisonnement inductif par présomption occupe une place privilégiée qui tient à la nature même de la démarche technologique qui procède par adaptation en tenant compte des différentes contraintes induites par les propriétés des matériaux, les processus de réalisation, les coûts de fabrication…, pour satisfaire au mieux à un cahier des charges préalablement défini.